Corrigé

1. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée et somme de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}.$$

2. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $x^2+1 > 0$ et $x^2+x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
f		$+\infty$
	-2	

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, de plus $0 \in [-2;+\infty[$ donc, d'après un corollaire des théorèmes intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. On a de plus $f(0,7) \approx -0,2$ et $f(0,8) \approx 0,09$ d'où $0,7 < \alpha < 0,8$.